DS de mathématiques n°10

Permutations, déterminants, intégration, dénombrement, probabilités

Durée : **4h**. Calculatrices non autorisées.
La clarté du raisonnement et la lisibilité de la copie pourront faire varier la note de ± 1 point.
Les exercices sont de difficulté (plus ou moins) croissante et les premiers exercices rapportent plus de points (à difficulté égale) que les suivants.

Exercice 1 : déterminants (et algèbre linéaire)

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le déterminant de taille $2n$ suivant :
$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & & & 0 & & 1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ 0 & & 2 & 1 & & \\ & & 1 & 2 & & 0 \\ & \iddots & & & \ddots & \\ 1 & & 0 & & & 2 \end{vmatrix}_{(2n)}$$

- **a)** Calculer D_1 et D_2.
- **b)** En déduire D_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
  On cherchera une relation de récurrence.

2) Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$, E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$f(e_1) = e_1 + ae_2 + bce_3, \qquad f(e_2) = e_1 + be_2 + ace_3, \qquad f(e_3) = e_1 + ce_2 + abe_3$$

- **a)** Expliquer pourquoi ces trois relations suffisent à déterminer f de manière unique.
- **b)** Calculer le déterminant de f sous forme factorisée. Pour quelles valeurs de a, b et c est-ce que f est inversible ?

3) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices inversibles telles que $\det A = \det B$.

- **a)** Rappeler une relation entre $\operatorname{com}(A)$ et A, où $\operatorname{com}(A)$ désigne la comatrice de A.
- **b)** Montrer que $\operatorname{com}(B)$ est inversible et donner $\operatorname{com}(B)^{-1}$.
- **c)** Déduire des questions **a)** et **b)** que si A est semblable à $\operatorname{com}(B)$ alors B est semblable à $\operatorname{com}(A)$.

Exercice-Problème 2 : Nombre de dérangements

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$. On appelle *dérangement* toute permutation qui n'a pas de point fixe. On note d_n le nombre de dérangements dans S_n :

$$d_n := \operatorname{Card}\left\{ \sigma \in S_n \;\middle|\; \forall k \in [\![1, n]\!] \quad \sigma(k) \neq k \right\}$$

On pose $d_0 = 1$ par convention. Dans tout ce problème, l'expression "avoir k points fixes" signifiera "avoir *exactement* k points fixes" (ni plus, ni moins). Tout schéma aidant la compréhension est bienvenu, mais ne saura être suffisant pour se substituer à une justification.

1) Déterminer d_1, d_2 et d_3.

2) **a)** On pose $\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_4$. Décomposer σ^2 en produit de cycles à supports disjoints.

- **b)** Donner tous les éléments de S_4 et en déduire d_4.

3) **a)** Rappeler la valeur du cardinal de S_n.

b) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, exprimer le nombre d'éléments de S_n ayant k points fixes en fonction d'un nombre de dérangements que l'on précisera.

c) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k = n!$

d) Que vaut d_5 ?

4) En arrivant à une fête, 5 personnes déposent leur manteau, en vrac, dans une petite pièce. En fin de soirée, chacune de ces 5 personnes repart en prenant, au hasard, un des 5 manteaux (l'abus d'alcool n'aidant pas à distinguer les différents manteaux).

a) Donner un univers Ω et une probabilité $\mathbb{P}$ associés à cette "expérience" aléatoire.

b) Quelle est la probabilité qu'aucun des invités ne reparte avec son manteau ?

On admet dans la suite du problème la formule suivante : $d_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

5) Déterminer la limite de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^t dt$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6) En apportant les justifications nécessaires, appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction exponentielle, à l'ordre n en 0.

7) Déduire des deux questions précédentes la limite notée ℓ de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

8) Soit p_n la probabilité qu'une permutation de S_n prise au hasard soit un dérangement. Quelle est la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 3 : Étude d'une fonction définie par une intégrale

1) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la fonction $t \mapsto t^x$ se prolonge par continuité en 0. Dans la suite, on ne fera aucune différence entre $t \mapsto t^x$ et son prolongement par continuité en 0.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^x} dt$. Calculer $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ et $\varphi(2)$.

3) Montrer que φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

4) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la fonction $F : t \in [0,1] \mapsto \dfrac{1}{x+1} t^{x+1}$ est une primitive de $t \mapsto t^x$ sur $]0, 1]$. Montrer que F est dérivable en 0 et donner $F'(0)$.

5) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x \leq y$, on a $\varphi(y) - \varphi(x) \leq y - x$.

6) En déduire que φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

7) En majorant $|1 - \varphi(x)|$ pour tout $x \geq 0$, déterminer la limite de φ en $+\infty$.

8) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $\varphi(x) = \dfrac{1}{2} + x \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2} dt$.

9) En déduire que φ est dérivable en 0 et que $\varphi'(0) = 1/4$.

Voici une contrepèterie où il faut appliquer un 3-cycle à trois lettres (et non juste un échange de deux lettres) : *Le boutre du sultan coule dans le confluent de la Garonne.*